

Επίλυση καθημερινών προβλημάτων με χρήση των μαθηματικών

Σύνδεση με τέχνη

Οι εξισώσεις και οι ανισώσεις χρησιμοποιούνται συχνά στην καθημερινή ζωή και στην τέχνη. Μέσα από τη δραστηριότητα, οι μαθητές θα μάθουν πώς ορισμένες συνθήκες που μας περιορίζουν στην τέχνη συντίθενται σε ανισότητα και πώς να την επιλύουν. Αυτό το παράδειγμα σχετίζεται με ένα γλυπτό από πηλό.

Σύνδεση με αναλυτικό πρόγραμμα

Εξισώσεις και ανισώσεις/ Επίλυση της ανισότητας (πραγματικοί αριθμοί)- υπολογιστική επίλυση της ανισότητας και δοκιμή

Β΄ Γυμνασίου, Ενότητα 4: <https://mathm.schools.ac.cy/index.php/el/mathimatika/analytiko-programma>

Εξοπλισμός/ υλικό

- υπολογιστή συνδεδεμένο στο Διαδίκτυο,
- στυλό,
- φύλλο χαρτί.

Διάρκεια: 45 λεπτά

Περιγραφή δραστηριότητας

Οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν ένα καθημερινό πρόβλημα και ένα πρόβλημα σχετικό με την τέχνη για να γράψουν μια ανισότητα σύμφωνα με το κείμενο. Αντιμετωπίζουμε καθημερινά εξισώσεις και ανισώσεις, αλλά συχνά δεν τις αναγνωρίζουμε ως ανισότητες και λύνουμε το πρόβλημα με το μυαλό μας. Μέσα από τη δραστηριότητα θα προσπαθήσουμε να το συνδυάσουμε αυτό - πώς να γράψουμε μια καθημερινή κατάσταση σε μαθηματική γλώσσα και στη συνέχεια να την λύσουμε, χρησιμοποιώντας ήδη γνωστές διαδικασίες. Στο τέλος, οι μαθητές θα μάθουν να ελέγχουν τα αποτελέσματά τους.

Μαθησιακοί στόχοι

Με την ολοκλήρωση αυτής της δραστηριότητας, οι μαθητές θα είναι σε θέση να:

- επιλύουν μια ανισότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, χρησιμοποιώντας έναν ισοδύναμο μετασχηματισμό, να κάνουν δοκιμή και να σκέφτονται τη σημασία του αποτελέσματος.
- να γράφουν μια εξίσωση και να την επιλύουν.

Οδηγίες

Στάδιο 1 – Αφόρμηση

Εξηγήστε:

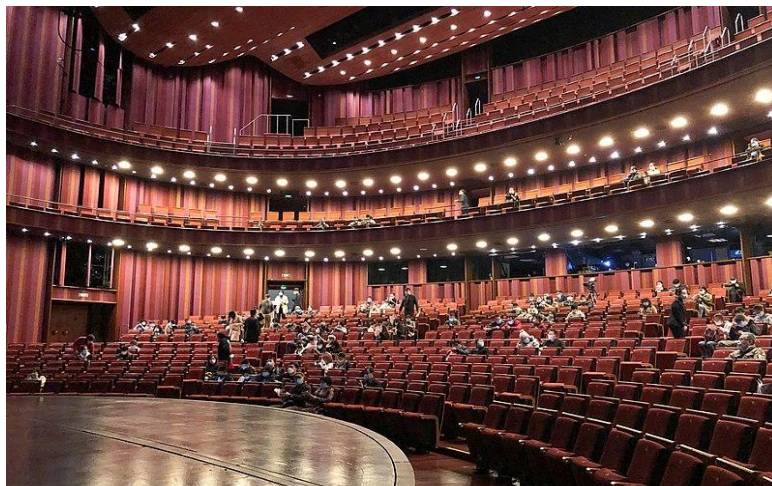
Στη ζωή μας περιτριγυρίζομαστε καθημερινά από εξισώσεις και ανισώσεις, αλλά συχνά δεν τις αναγνωρίζουμε. Αν και οι εξισώσεις είναι συνηθισμένες στην καθημερινή ζωή, οι ανισότητες είναι ακόμη πιο συνηθισμένες. Συχνά μας ενδιαφέρει όχι ακριβώς πότε θα συμβεί ένα γεγονός, αλλά τουλάχιστον πόσο χρόνο έχουμε μέχρι να συμβεί. Και σε αυτό το σημείο έρχονται οι ανισότητες.

*Πόση ώρα μπορώ να οδηγήσω το αυτοκίνητο πριν μου τελειώσει η βενζίνη;
Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός ειδών που μπορώ να αγοράσω στο κατάστημα
για να μην ξεμείνω από χρήματα;
Ποια είναι η ελάχιστη ποσότητα μπογιάς που πρέπει να αγοράσω
για να ξαναβάψω ένα δωμάτιο;*

Αυτά είναι μερικά μόνο από τα ερωτήματα που συναντάμε στην καθημερινή μας ζωή και τα οποία στην πραγματικότητα βασίζονται σε ανισότητες και μαθηματικά. Μέσα από αυτή τη δραστηριότητα, θα μάθετε πώς να τις λύσετε.

Πρόβλημα καθημερινής ζωής

Στο θέατρο παίζεται μια τραγωδία και μια μοδίστρα έπρεπε να ράψει πολλά διαφορετικά κοστούμια για όλους τους ηθοποιούς. Κάθε κοστούμι είχε πάνω του μερικούς πολύτιμους λίθους, έτσι αγόρασε 75 πολύτιμους λίθους και έπρεπε να ράψει τέσσερις πολύτιμους λίθους σε κάθε γυναικείο κοστούμι και δύο σε κάθε ανδρικό κοστούμι. Έκανε ήδη 11 γυναικεία κοστούμια και στη συνέχεια προχώρησε στα ανδρικά, όταν ξαφνικά συνειδητοποίησε ότι δεν θα είχε αρκετούς πολύτιμους λίθους για να τελειώσει όλα τα κοστούμια. Τουλάχιστον πόσα ανδρικά κοστούμια έπρεπε να κάνει;



Εικόνα 1: Θέατρο NCPA

πηγή: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:NCPA_Theatre_\(20201022191356\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:NCPA_Theatre_(20201022191356).jpg)
για χρήση

Εμπέδωση προϋπάρχουσας γνώσης

Οι μαθητές επανεξετάζουν πώς λύνουμε εξισώσεις με ισοδύναμο μετασχηματισμό. Λύνουν την εξίσωση:

- $2x - 3 = 15$
- $3 - x = 5x + 2$

Στάδιο 2 – Διερεύνηση

Εργασία 1

Εξηγήστε:

Πρώτον, πρέπει να προσπαθήσουμε να γράψουμε την ανισότητα του προβλήματός μας. Αυτό το κάνουμε σύμφωνα με τα ήδη γνωστά βήματα, παρόμοια με την εξίσωση.

Επομένως, πρώτα, ας ξαναδιαβάσουμε την εργασία και ας γράψουμε τα γνωστά δεδομένα. Η μοδίστρα έκανε ήδη 11 γυναικεία κοστούμια (το καθένα έχει τέσσερις πολύτιμους λίθους), αλλά χρειαζόταν περισσότερους από 75 πολύτιμους λίθους.

Στο επόμενο βήμα, προσδιορίζουμε τον άγνωστο. Θα το σημειώσουμε με x , που αντιπροσωπεύει τον αριθμό των ανδρικών κοστούμιών που θα έπρεπε να έχει φτιάξει.

Ας προσπαθήσουμε να γράψουμε την ανισότητα σύμφωνα με το παραπάνω κείμενο.

$$11 \cdot 4 + x \cdot 2 > 75$$

Εργασία 2 – Υπολογιστική λύση της ανισότητας και έλεγχος

Εξηγήστε:

Θα μπορούσαμε να αναδιατυπώσουμε αυτή την ανισότητα, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τον νόμο αντικατάστασης που ισχύει για τον πολλαπλασιασμό:

$$44 + 2x > 75$$

Τώρα μπορούμε να εξετάσουμε τους κανόνες του ισοδύναμου μετασχηματισμού, οι οποίοι ισχύουν και για τις εξισώσεις με μερικές εξαιρέσεις:

Προσοχή! Εάν πολλαπλασιάσετε μια άρτια ανισότητα με έναν αρνητικό αριθμό κατά τη διάρκεια του ισοδύναμου μετασχηματισμού, η ανισότητα αντιστρέφεται επίσης:

Παράδειγμα: (πολλαπλασιάστε) $-x > 3 - 1$

$$x < -3$$

Στο πρώτο βήμα του μετασχηματισμού, έχουμε την ανισότητα:

$$2x > 75 - 44$$

Για να αφαιρέσετε αριθμούς από τη δεξιά πλευρά και να διαιρέσετε μια ανισότητα με το 2, ισχύουν τα εξής:

$$x > 15.5$$

Αυτό σημαίνει ότι η λύση της παραπάνω ανισότητας βρίσκεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Ωστόσο, αν κοιτάξουμε το παραπάνω κείμενο, βλέπουμε ότι το πρώτο ουσιαστικό αποτέλεσμα είναι το 16 (δεν μπορούμε να έχουμε, για παράδειγμα, 15.7 άτομα).

Επομένως, η απάντηση στην παραπάνω εργασία είναι ότι έπρεπε να φτιάξει τουλάχιστον 16 ανδρικές στολές.

Ας κάνουμε ένα άλλο τεστ και έναν άλλο υπολογισμό για το αποτέλεσμά μας. Επειδή υπάρχουν άπειρες λύσεις, δεν μπορούμε να τις ελέγξουμε όλες, οπότε θα κάνουμε έναν έλεγχο για απαντήσεις στην άκρη του συνόλου - δηλαδή για τη μικρότερη ή τη μεγαλύτερη λύση. Ο έλεγχος και ο υπολογισμός θα είναι παρόμοιος με αυτόν των εξισώσεων.

Δοκιμή (υπολογισμός) για τη λύση: $x = 16$

$$44 + 2 \cdot 16 > 75$$

$$44 + 32 > 75$$

$$76 > 75$$

Το 16 είναι η σωστή λύση αυτής της ανισότητας.

Ας ολοκληρώσουμε μια πιο δύσκολη εργασία- ας λύσουμε ένα πιο σύνθετο πρόβλημα. Η Άννα και ο Μαξ παρακολούθησαν μαθήματα γλυπτικής με πηλό.



Εικόνα 2: Αγγειοπλαστική
Πηγή: <https://pxhere.com/en/photo/1414703>
για χρήση

Καθένας από αυτούς έλαβε μερικά πακέτα για να αρχίσει να σχεδιάζει. Η Άννα έλαβε τρία πακέτα με πηλό και ο Μαξ έλαβε πέντε πανομοιότυπα πακέτα. Εκτός από τον πηλό στα πακέτα, η Άννα έλαβε 850 g πηλού, ενώ ο Μαξ έλαβε μόνο 120 g. Ποια είναι η μέγιστη μάζα ενός πακέτου πηλού, ώστε η Άννα να έχει περισσότερο πηλό από τον Μαξ;

Σε αυτή την περίπτωση, θα επιλέξουμε ως άγνωστο τη μάζα ενός πακέτου πηλού και θα τη σημειώσουμε με y . Στη συνέχεια, ξαναδιαβάζουμε την εργασία και προσπαθούμε να γράψουμε την ανισότητα.

$$3y + 850 \text{ g} > 5y + 120 \text{ g}$$

Όπως και με τις εξισώσεις, θα βάλουμε τους αγνώστους στην ίδια πλευρά, για να έχουμε τα εξής:

$$3y - 5y > 120 \text{ g} - 850 \text{ g}$$

Απλοποιούμε και τις δύο πλευρές:

$$-2y > -730 \text{ g}$$

Στο επόμενο βήμα, διαιρούμε την εξίσωση με το -2 , οπότε πρέπει να αντιστρέψουμε το πρόσημο της ανισότητας:

$$y < 365 \text{ g}$$

Πήραμε τη λύση της ανισότητας και του προβλήματός μας: Αν θέλουμε η μάζα του πηλού της Άννας να είναι μεγαλύτερη από τη μάζα του πηλού του Μαξ, η μάζα του πακέτου πηλού πρέπει να είναι μικρότερη από 365 g .

Πιθανόν να έχετε παρατηρήσει ότι η μέγιστη λύση δεν μπορεί να προσδιοριστεί, διότι, με μάζα πακέτου 365 g , η Άννα και ο Μαξ θα είχαν την ίδια ποσότητα πηλού, πράγμα που δεν είναι αυτό που θέλουμε. Επειδή όμως λύνουμε την ανισότητα σε πραγματικούς αριθμούς, υπάρχουν άπειροι αριθμοί μεταξύ 364 και 365 , οπότε δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε τον ακριβή μεγαλύτερο αριθμό (λύση). Επομένως, επιλέγουμε μια αυθαίρετη (αλλά μεγάλη) λύση της δοκιμασίας (υπολογισμός).

Το τεστ (υπολογισμός) για: $y = 364 \text{ g}$

$$3 \cdot 364 \text{ g} + 850 \text{ g} > 5 \cdot 364 \text{ g} + 120 \text{ g}$$

$$1092 \text{ g} + 850 \text{ g} > 1820 \text{ g} + 120 \text{ g}$$

$$1942 \text{ g} > 1940 \text{ g}$$

Η ανισότητα ισχύει, οπότε $y = 364 \text{ g}$ είναι η σωστή λύση στην πιο πάνω ανισότητα.

Εργασία 3

Εξηγήστε:

Όταν διαβάζουμε ένα πρόβλημα, πρέπει πρώτα να γράψουμε μια ανισότητα που προκύπτει από το κείμενο. Ωστόσο, πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στο τι επιλέγουμε ως άγνωστο. Μια ανισότητα διαφέρει από μια εξίσωση. Η ανισότητα έχει ένα σύμβολο ανισότητας $<$ ή $>$ μεταξύ της αριστερής και της δεξιάς πλευράς.

Αφού γράψουμε μια ανισότητα, την επιλύουμε με τον ισοδύναμο μετασχηματισμό παρόμοια με τις εξισώσεις. Ωστόσο, πρέπει να είμαστε προσεκτικοί, όταν πολλαπλασιάσουμε με

αρνητικούς αριθμούς (τότε η ανισότητα αντιστρέφεται). Στο τέλος της εργασίας, εξετάζουμε τη σημασία του αποτελέσματος. Κάνουμε έναν έλεγχο (υπολογισμό) για τη μεγαλύτερη ή τη μικρότερη λύση.

Στάδιο 3 – Αξιολόγηση/ Εμπέδωση

Εργασία 1: Λύστε τις ανισώσεις και κάντε τις δοκιμές (υπολογισμούς):

- $6x - 13 < 10$
- $2y + 4 > 5y - 2$

Εργασία 2: Γράψτε την εξίσωση και λύστε την: Ο ζωγράφος άρχισε να ζωγραφίζει σε ένα νέο καμβά. Χρησιμοποιεί κατά μέσο όρο 23 ml μπογιάς κάθε ώρα. Πόση ώρα μπορεί να ζωγραφίσει μέχρι να εξαντλήσει ολόκληρο το σωληνάριο που περιέχει 200 ml μπογιάς;

ΕΤΙΚΕΤΕΣ

- Διαδικτυακή δραστηριότητα
- Δραστηριότητα στην τάξη
- Καλλιτεχνική εργασία
- Γλυπτική
- Θέατρο